

УДК: 539.3: 624.04
DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.10
EDN: JPGQMS



Определение перемещений балки с трещиной с использованием теории стержней

М.Н. Серазутдинов¹

¹Казанский национальный исследовательский технологический университет,
г. Казань, Российская Федерация

Аннотация. *Постановка задачи.* В настоящее время актуальность исследования проблем, связанных с возникновением повреждений в балках в виде трещин, обусловлена с необходимостью прогнозировать последствия их возникновения в эксплуатируемых сооружениях. Расчет сложных стержневых конструкций, с использованием только соотношений теории упругости, связан со значительными трудностями. В таких случаях, рациональный метод исследования состоит в сочетании сравнительно простых в реализации методов расчета и теории упругости. *Цель работы* заключается в выявлении основных закономерностей изменения деформированного состояния в стержневых системах при образовании в них различных дефектов и повреждений. *Задачей исследования* является разработка математической модели и метода расчета балок при изгибе, позволяющие определять перемещения, возникающие при возникновении трещины.

Результаты. Построена математическая модель деформирования балок при изгибе, позволяющая определять перемещения, возникающие при возникновении трещины. Особенность этой модели заключается в том, что часть стержня, содержащая трещину, заменяется участком, на котором размеры поперечного сечения меньше исходной величины. Выявлены достаточно общие закономерности деформирования балок с повреждениями. В частности, показано, что для трещин с одинаковой относительной глубиной, расчетная величина высоты поперечного сечения ослабленного участка получается примерно одинаковой для разных случаев нагружения и закрепления балки. *Выводы.* Значимость полученных результатов для строительной отрасли состоит в совершенствовании методов расчета стержневых конструкций при возникновении трещин в эксплуатируемых сооружениях.

Ключевые слова: трещина, изгиб балки, математическая модель, деформированное состояние, закономерности изгиба

Для цитирования: Серазутдинов М.Н. Определение перемещений балки с трещиной с использованием теории стержней // Известия КГАСУ, 2024, № 2(68), с. 114-123, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.10, EDN: JPGQMS

Determination of movements of a beam with a crack using the theory of rods

M.N. Serazutdinov¹

¹Kazan National Research Technological University,
Kazan, Russian Federation

Abstract. *Problem statement.* Currently, the relevance of studying the problems associated with the occurrence of damage in beams in the form of cracks is due to the need to predict the consequences of their occurrence in operated structures. The calculation of complex rod structures, using only the relations of the theory of elasticity, is associated with significant difficulties. In such cases, a rational research method consists of a combination of relatively

easy-to-implement calculation methods and elasticity theory. *The purpose of the work* is to identify the main patterns of changes in the deformed state in rod systems during the formation of various defects and damages in them. *The objective of the study* is to develop a mathematical model and a method for calculating beams during bending, which allows determining the movements that occur when a crack appears.

Results. A mathematical model of beam deformation during bending is constructed, which allows determining the movements when a crack occurs. The peculiarity of this model is that the part of the rod containing the crack is replaced by a section in which the cross-sectional dimensions are smaller than the initial value. General patterns of deformation of beams with damage have been revealed. In particular, it is shown that for cracks with the same relative depth, the calculated height of the cross-section of the weakened section is approximately the same for different cases of loading and fastening of the beam.

Conclusions. The significance of the results obtained for the construction industry consists in improving the methods of calculating rod structures when cracks occur in operated structures.

Keywords: crack, beam bending, mathematical model, deformed state, bending patterns

For citation: Serazutdinov M.N. Determination of movements of a beam with a crack using the theory of rods // News KSUAE, 2024, № 2(68), p. 114-123, DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.10, EDN: JPGQMS

1. Введение

Последствия возникновения трещин и дефектов, возникающих в деформируемых телах, обычно исследуются с использованием теории упругости или экспериментальными методами. В последние десятилетия для анализа напряженно - деформированного состояния (НДС) конструкций с трещинами также достаточно широко применяются упрощающие расчёт специально разработанные методы, основанные на некоторых гипотезах.

Имеются научные разработки, в которых для определения перемещения и углов поворота балок применяется не классическая теория упругости, а соотношения нелокальной градиентной теории упругости [1-3].

В ряде научных публикаций, в том числе и в [4-6] элементы конструкций с трещинами рассматриваются как совокупность неповрежденных балок, соединенных в месте трещины пружинами, жесткость которых можно определить на основе механики разрушения или молекулярной динамики.

В работе [7] для оценки деформаций в балке с трещиной вводится расчетная жесткость, выбор величины которой основан на анализе перераспределения напряжений.

С учетом этого, что в месте образования трещины, угол наклона поперечного сечения балки имеет разрыв, в статье [8] для анализа НДС пролетных конструкций с трещинами вводилась функция описывающая указанный разрыв.

В [9] изложена модель изгиба балки с надрезом, основанная на соотношениях теории стержней и условий сопряжения частей балки в месте надреза.

В случаях, когда в стержне имеется не один, а несколько дефектов, значительное применение получил подход, использующий для учета трещины дельта-функцию [10-12].

В обзорной статье [13] значительное внимание уделено описанию методов моделирования различных дефектов в стержнях.

Проведение исследований, подобных описанным в [1-12], вызвано необходимостью определять расположение трещин и прогнозировать последствия их возникновения в эксплуатируемых сооружениях. Как показывает анализ научной литературы, для изучения последствий возникших в балках дефектов можно использовать приближенные методы, базирующиеся на анализе интегральных деформационных и (или) частотных характеристик. Такие методы, естественно, не позволяют получить информацию о НДС вблизи трещины, но их можно применять при определении интегральных характеристик.

Проведение исследований на основе теории упругости, в ряде случаев связано со значительными трудностями. Например, если в одном из элементов сложной статически неопределимой стержневой системе возникло повреждение ослабляющее сечение, то это

приведёт к перераспределению НДС во всей системе. Для сложной конструкции определить на основе теории упругости параметры, характеризующие изменение НДС во всей системе трудно решаемая задача. В таких случаях один из возможных способов определения НДС может заключаться в следующем. На первом этапе можно с учетом изменений, возникающих при образовании повреждения, вычислить значения перемещений по сравнительно простой в реализации теории стержней. Затем, на втором этапе, рассчитать по теории упругости НДС стержня с повреждениями, используя в качестве граничных условий вычисленные значения перемещений на концах стержня.

Отметим, что необходимость учёта перераспределения НДС при образовании различных дефектов и повреждений в статически неопределимых системах возникает, например, при расчёте усиления конструкции. Это связано с тем, что анализ эффективности усиления сооружения предполагает оценку НДС системы до и после усиления [14 -16].

Целью настоящей работы является выявление основных закономерностей изменения деформированного состояния в стержневых системах при образовании в них различных дефектов и повреждений в виде трещин. Задача исследования заключается в создании математической модели и метода расчета балок при изгибе, позволяющих определять перемещения, возникающие при возникновении трещины.

2. Материалы и методы

Изложим модель деформирования балки с трещиной и метод расчета, которые могут быть использованы для вычисления перемещений. Предлагаемый способ позволяет выявить необходимые закономерности деформирования поврежденного элемента, получить данные о перемещении балки на основе сравнительно простых соотношений теории стержней.

Рассмотрим деформацию изгиба. Полагаем, что трещина образовалась на растянутой стороне балки. Очевидно, что на гранях раскрывшейся трещины напряжения равны нулю, а в некоторой окрестности граней они меньше, чем в исходном неповрежденном состоянии элемента конструкции. Сечение в месте возникновения дефекта ослаблено. Наиболее простой способ смоделировать ослабление сечения, предположить, что в области, прилегающей к граням трещины, поперечные размеры стержня уменьшаются. Исходя из этого, полагаем, что балку с трещиной можно представить в виде стержневого элемента с кусочно-переменным по длине сечением. Основной вопрос, который при этом возникает, это как определить размеры области, в которой сечения стержня уменьшаются.

На рис. 1а, рис.1б показаны фрагменты балки при изгибе, с трещиной в растянутой зоне. Для учета ослабления сечения в месте возникновения трещины, полагаем, что

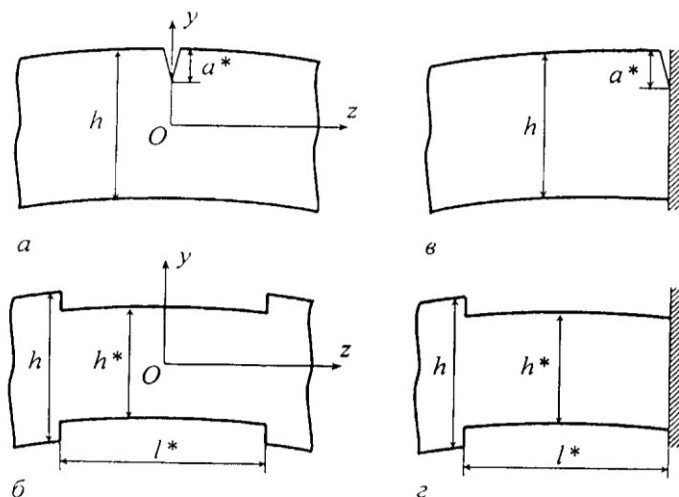


Рис. 1. Фрагмент балки с трещиной (а); модель фрагмента балки с трещиной (б); трещина в заделке (в); модель фрагмента с трещиной в заделке (г) (иллюстрация автора)

Fig. 1. A fragment of a beam with a crack (a); a model of a fragment of a beam with a crack (b); a crack in the seal (c); a model of a fragment with a crack in the seal (d) (illustration by the authors)

вместо трещины, в некоторой ее окрестности, можно ввести участок длиной l^* , на котором высота поперечного сечения стержня h^* будет меньше, чем ее исходная величина h ($h^* < h$, рис.1б, рис.1з). Значения l^* , h^* заранее не известны. Их величина зависит от глубины трещины a^* и от других параметров балки. Используем следующий метод определения l^* и h^* . Найдем максимальное значение прогиба балки с трещиной v_{TY} на основе соотношений теории упругости. Затем, задавая значение l^* и используя дифференциальное уравнение изгиба балки, подбираем величину h^* из условия

$$v_{max} = v_{TY}, \quad (1)$$

где v_{max} – максимальное значение прогиба балки, подсчитанное по теории стержней. Задавая различные значения l^* и других параметров поперечного сечения и трещины, можно исследовать закономерности деформации балки, применимость и достоинство модели, в которой балку с трещиной представляется в виде стержневого элемента с кусочно-переменным по длине сечением.

В описанном алгоритме расчетов максимальный прогиб балки с трещиной v_{TY} находится на основе соотношений теории упругости. Поэтому, естественно, что полученные закономерности деформирования изгибаемых балок должны быть такими, чтобы описанную расчетную модель, в виде стержневого элемента с кусочно-переменным по длине сечением, можно было использовать и в случаях отличных от того, который был рассмотрен при расчетах по теории упругости.

Для апробации предлагаемой модели балки с трещиной в виде стержневого элемента с кусочно-переменным по длине сечением, рассмотрим изгиб балок с различными геометрическими характеристиками, условиями закрепления, при действии сосредоточенной и распределенной нагрузки, с трещиной, расположенной в разных местах. Варианты В1, В2, ... В5, для которых проводились расчеты представлены в таблице 1.

Полагалось, что поперечное сечение стержня – прямоугольник шириной $b = 0.1$ м и высотой h , $E = 2 \cdot 10^5$ МПа. Расчетные данные получены для шарнирно-опертых по концам (в табл. 1 «Шарнирные опоры») и консольных балок (в табл. 1 «Заделка»), нагруженных, соответственно, распределенной по длине нагрузкой q и сосредоточенной силой F , приложенной на свободном конце.

Максимальный прогиб v_{TY} балки с трещиной вычислялся на основе соотношений плоской задачи теории упругости (коэффициент Пуассона $\nu=0$).

Таблица 1

Исходные параметры балок

Вариант	Вид закрепления	Координата z трещины	$l, м$	$F; q$	$h, м$
В1	Шарнирные опоры	$0.5 l$	4	$q = 10^4$ н/м	0.2
В2	Заделка	l	3	$F = 10^4$ н	
В3	Заделка	$0.5 l$	3	$F = 10^4$ н	
В4	Шарнирные опоры	$0.5 l$	4	$q = 10^4$ н/м	0.12
В5	Заделка	l	4	$F = 10^4$ н	

Прогиб $v(z)$ балки с кусочно-постоянным поперечным сечением находился на основе дифференциального уравнения изгиба балки. На каждом участке с постоянной жесткостью при изгибе используется уравнение

$$\frac{d^2 v_i(z)}{dz^2} = -\frac{M_x(z)}{EI_x^i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Здесь i – номер участка, v_i – прогиб на участке с номером i ; M_x – изгибающий момент; EI_x^i – жесткость при изгибе.

Решение этого уравнения

$$v_i(z) = -\iint \frac{M_x(z)}{EI_x^i} dzdz + c_1^i z + c_2^i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

где c_1^i, c_2^i – константы интегрирования, которые находятся из условий стыковки прогибов и углов поворота в сечениях скачкообразного изменения жесткостей балки, также из граничных условий.

3. Результаты расчетов

При проведении расчетов задавались значения длины l^* участка с высотой поперечного сечения стержня h^* меньшей, чем высота h стержня до образования трещины. Затем, используя итерационный процесс из условия (1) с погрешностью менее 1% находилась величина h^* .

На рис. 2-4 представлены графики, иллюстрирующие зависимость высоты поперечного сечения стержня h^* от относительной глубины трещины $\tilde{a} = a^*/h$ и длины l^* участка, который вводится для моделирования ослабления сечения при возникновении трещины.

Показанные на рис.2 графики, получены для балок различной длины (табл. 1), у которых трещина расположена в наиболее напряженном сечении ($M_x = M_x^{max}$). Одна из балок шарнирно оперта по концам и нагружена равномерно распределенной нагрузкой, другая – на одном конце заделана и нагружена сосредоточенной силой.

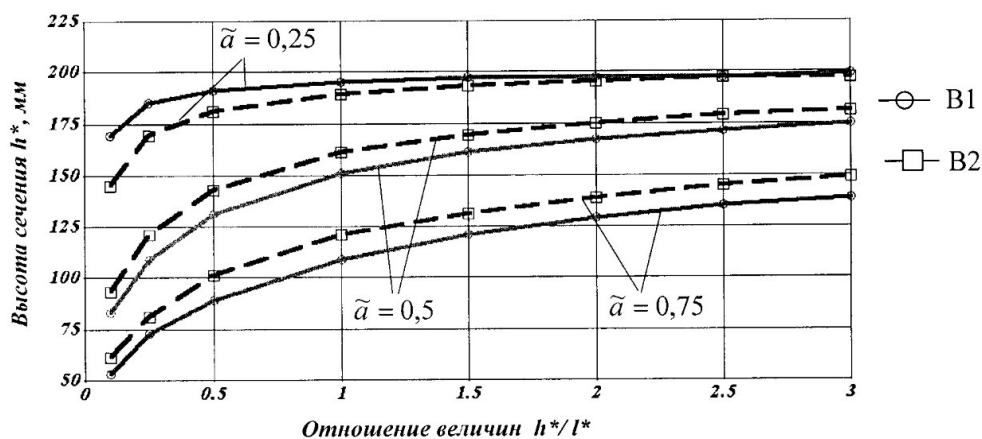


Рис. 2. Графики зависимости h^* от l^* для вариантов B1 и B2 (иллюстрация авторов)

Fig. 2. Graphs of the dependence of h^* on l^* for variants B1 and B2 (illustration by the authors)

Графики, на рис.3, построены по данным расчетов консольной балки, у которой в одном случае трещина расположена у заделки (вариант В2), а в другом (вариант В3) – по середине длины. Внешняя нагрузка - сосредоточенная сила, приложенная на незакрепленном конце.

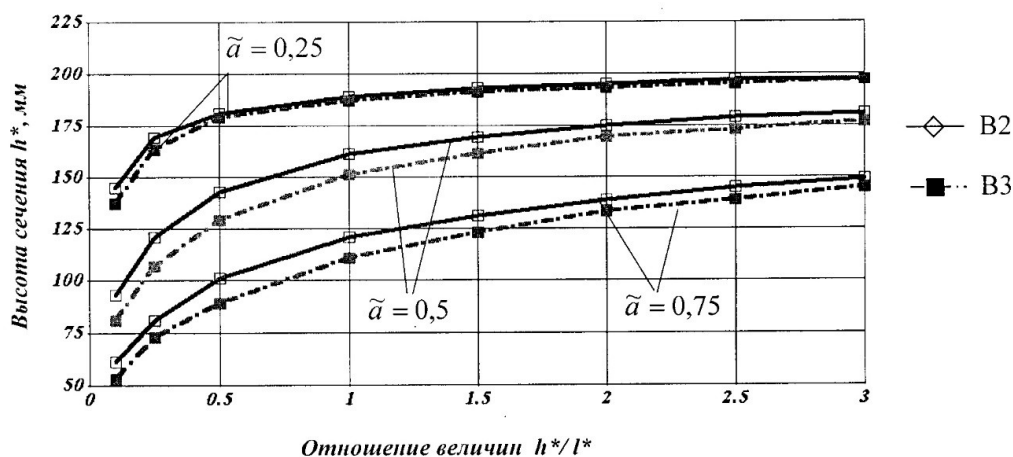


Рис. 3. Графики зависимости h^* от l^* для вариантов В2 и В3 (иллюстрация авторов)

Fig. 3. Graphs of the dependence of h^* on l^* for variants B2 and B3 (illustration by the authors)

На рисунках 2 и 3 представлены зависимости h^* от l^* , полученные для стержней (табл. 1), у которых одинаковая изгибная жесткость ($b=0.1 м, h=0.2 м$).

Графики на рис. 4 иллюстрируют зависимости h^* от параметров $\tilde{a} = a^*/h$ и l^* для балок (варианты В4, В5), у которых величина высоты сечения h другая (по сравнению с вариантами В1-В3. В вариантах В4, В5 трещина расположена в наиболее напряженном сечении ($M_x = M_x^{max}$). Одна из балок шарнирно оперта по концам и нагружена равномерно распределенной нагрузкой, другая – на одном конце заделана, а на другом - нагружена сосредоточенной силой.

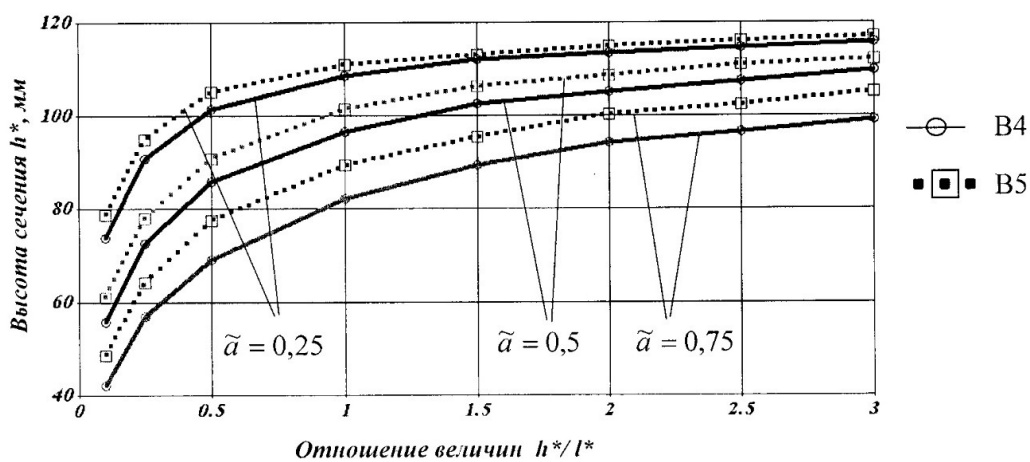


Рис. 4. Графики зависимости h^* от l^* для вариантов В4 и В5 (иллюстрация авторов)

Fig. 4. Graphs of the dependence of h^* on l^* for variants B4 and B5 (illustration by the authors)

Как видно из представленных на рис. 2-4 данных, описанный метод моделирования трещины введением участка стержня с меньшим, чем в исходном состоянии, размером сечения, позволяет получить зависимости между различными параметрами и проявить

достаточно общие закономерности. Так, графики на рис. 2 и рис. 3 показывают, что для трещин с одинаковой относительной глубиной ($\tilde{a} = a^*/h$) расчетные величины искомых размеров высоты поперечного сечения ослабленно участка балки h^* получаются примерно одинаковыми для различных расчетных вариантов.

В таблице 2 представлены относительные значения высоты сечения $\tilde{h} = h^*/h$, вычисленные в зависимости от глубины трещины a^*/h и задаваемой длины l^*/h участка балки с уменьшенным сечением. Приводятся также величины $\Delta\tilde{h} \cdot 10^2$, кратные наибольшей разнице вычисленных в вариантах В1-В3 параметров \tilde{h} ($\Delta\tilde{h} = \tilde{h}_{\max} - \tilde{h}_{\min}$), а также значения $\Delta\tilde{h}$ в процентах ($\Delta = \frac{(\tilde{h}_{\max} - \tilde{h}_{\min})}{\tilde{h}_{\max}} \cdot 100\%$).

Таблица 2

Значения параметра $\tilde{h} = h^*/h$ для вариантов В1-В3

$h = 0,2 \text{ м}$		$\tilde{h} = h^*/h$			$\Delta\tilde{h} \cdot 10^2$	$\Delta, \%$
a^*/h	l^*/h	В1	В2	В3		
0,25	1	0,975	0,945	0,965	3	3,1
	2	0,985	0,975	0,965	2	2
	3	0,995	0,975	0,975	2	2
0,5	1	0,755	0,805	0,755	5	6,2
	2	0,835	0,875	0,845	4	4,6
	3	0,875	0,905	0,885	3	3,3
0,75	1	0,545	0,605	0,555	6	9,9
	2	0,645	0,695	0,655	5	7,2
	3	0,695	0,745	0,725	5	6,7

Как видно из табл. 1, величины искомых размеров высоты поперечного сечения h^* ослабленного участка балки, получаются примерно одинаковыми для различных расчетных случаев (табл.1, варианты В1-В3). Исходные данные вариантов В1-В3 существенно отличаются друг от друга, т.к. в них стержни имеют различную длину, по-разному закрепляются, нагружены сосредоточенной или распределенной нагрузкой, имеют трещины, расположенные в разных местах. Из-за различия в указанных параметрах, напряжения, возникающие в балке в месте образования трещины, существенно отличаются по величине. Также, в этих местах напряжений по длине балки изменяются по разным законам (экстремум или не экстремум; линейная или нелинейная зависимость от внешних сил). Тем не менее, при увеличении длины l^* , найденные значения высоты h^* поперечного сечения ослабленно участка балки получаются достаточно близкими.

Описанные закономерности получены для $h = 0,2 \text{ м}$, т.е. для случаев, когда исходная изгибная жесткость различных стержней одинакова. Как видно из рис. 4, при $h = 0,12 \text{ м}$ (варианты В4, В5), значения h^* уже существенно отличаются от значений, полученных при $h = 0,2 \text{ м}$. Однако, основные изложенные закономерности, вытекающие из данных табл. 2 сохраняются. Вычисляемые размеры высоты поперечного сечения h^* ослабленного участка балки получаются близкими для разных расчетных случаев и при $h = 0,12 \text{ м}$.

Обратим внимание на любопытный факт «игры цифр», представленных в табл.2. При расчетах параметр h^* определялся из условия удовлетворения равенству (1) с

точностью до 1%. Затем вычислялись значения $\tilde{h} = h^* / h$, которые округлялись до трех значащих цифр и вносились в табл.2. В результате получилось, что во всех 27 значениях $\tilde{h} = h^* / h$ последняя цифра - 5, и как результат этого, во всех представленных случаях величина параметра $\Delta \tilde{h} \cdot 10^2$ является **целой** однозначной цифрой. При расчете стержня с другой жесткостью на изгиб (при $h = 0,12$ м) указанные особенности в некоторой степени также проявляются. Так, при $h = 0,12$ м, из 9 рассчитанных значений параметра $\Delta \tilde{h} \cdot 10^2$, целой однозначной цифрой оказались 7 из 9.

Сравнение прогибов и углов поворота сечений балки при изгибе, определенных по теории стержней ($v(z)$ и $\frac{dv(z)}{dz}$) и с использованием соотношений теории упругости ($v_{TY}(z)$ и $\varphi_{TY}(z)$) показало, что указанные функции получаются практически одинаковыми. Значительное отличие $\frac{dv(z)}{dz}$ и $\varphi_{TY}(z)$ возникает только в окрестности трещины, т.к. $\frac{dv(z)}{dz}$ - непрерывная функция, а $\varphi_{TY}(z)$ имеет разрыв в месте трещины.

Отметим, что при вычислении $\varphi_{TY}(z)$ полагалось $\varphi_{TY}(z) = \frac{u_{TY}^+(z) - u_{TY}^-(z)}{h}$, где $u_{TY}^+(z)$ и $u_{TY}^-(z)$ - продольные перемещения балки при $y = \frac{h}{2}$ и $y = -\frac{h}{2}$.

Очевидно, что изложенный метод моделирования стержня с ослабленным сечением, не может быть использован для анализа НДС в окрестности трещины, т.к. для этого нужно проводить расчёты с использованием теории упругости. Однако, как показано в данной статье, прогибы и углы поворота стержня с трещиной можно рассчитывать с небольшой погрешностью и определять деформированное состояние на основе соотношений теории изгиба балок. При расчете деформированного состояния (прогибы и углы поворота) можно полагать, что трещины нет, а в окрестности сечения, где она возникла, на участке длиной l^* , толщина стержня h^* постоянная. Полученная таким образом информация затем может быть использована в качестве граничных условий для расчета напряженного состояния по теории упругости.

Например, если трещина возникает в элементе сложной статически неопределимой системы, то при ее образовании произойдет перераспределение усилий и перемещений. НДС системы с возникшей трещиной будет отличаться от исходного состояния, величины возникающих в ней усилий и перемещений становятся неизвестными. В этом случае, можно рассчитать деформированное состояние системы на основе теории стержней, а затем, если это необходимо, используя полученную информацию о прогибах и углах поворота балки, определить напряженное состояние поврежденного элемента с использованием теории упругости. При этом для анализа напряженного состояния балки с трещиной можно использовать соотношения теории упругости, а в качестве граничных условий – значения прогибов и углов поворота из расчета деформированного состояния по теории стержней.

Важно отметить, что как показывают расчеты, в изложенной модели стержня с трещиной, искомый параметр h^* получается примерно одинаковым для стержней, у которых одинаковые изгибная жесткость и глубина трещины. Другие параметры – длина, условия закрепления, вид нагрузки, особенности изменения изгибающего момента по длине балки, место расположения трещины могут различаться. Следовательно, если трещина образовалась в балке, которая является элементом сложной стержневой системы, то величину h^* можно определить, рассматривая только эту балку, задавая для нее нагрузку и граничные условия (виды опор, перемещения и углы поворота на концах),

которые были до возникновения трещины. Отметим, что в данной статье и в работах [1-12] результаты получены с использованием теории стержней. Поэтому их можно широко использовать при анализе интегральных характеристик - перемещений и низших частот собственных колебаний конструкции. Представленные в этой статье исследования полной мере соответствуют принятым в [1-12] теоретическим основам и согласуются с данными, опубликованным в [1-3].

4. Заключение

Представлены математическая модель и метод расчета балки с трещиной, позволяющие определять возникающие в ней перемещения. Для учета влияния трещины на деформированное состояние, в балке вводится участок, на котором площадью поперечного сечения меньше исходной величины. Изложен метод определения размеров введенного участка балки с уменьшенными размерами поперечного. В результате получается, что при изгибе прогибы и углы поворота стержня можно вычислять с использованием формул сопротивления материалов.

Для апробации предлагаемой модели приводятся результаты расчетов балок с различными геометрическими характеристиками, условиями закрепления, с трещиной, расположенной в разных местах, при действии сосредоточенной и распределенной нагрузок. Изложенный метод учета трещины, позволяет выявить достаточно общие зависимости между параметрами исследуемых объектов. Показано, что для трещин с одинаковой относительной глубиной, расчетная величина высоты поперечного сечения ослабленно участка получается примерно одинаковой для разных случаев нагружения и закрепления балки. Сравнение прогибов и углов поворота балки при изгибе, определенных по теории стержней и с использованием соотношений теории упругости показало, что указанные величины практически совпадают, за исключением малой зоны вблизи трещины. Отмечается, что в случае, когда трещина возникает в балке, которая является элементом сложной статически неопределимой стержневой системы, то изменение деформированного состояния системы можно определить, используя теорию стержней.

Список литературы/ References

1. Loya J., Lopez-Puente J., Zaera R., Fernandez-Saez J. Free transverse vibrations of cracked nanobeams using a nonlocal elasticity model // *J. Appl. Phys.* 2009. Vol. 105. 044309. DOI:10.1063/1.3068370. Corpus ID: 121034133.
2. Akbarzadeh Khorshidi M., Shariati M. Buckling and postbuckling of size-dependent cracked microbeams based on a modified couple stress theory // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2017. Vol. 58. № 4. P. 717–724. DOI:10.1134/S0021894417040174.
3. Фу Ч., Ян С. Анализ изгиба балки Тимошенко с трещиной с использованием нелокальной градиентной теории упругости // *Прикладная механика и техническая физика.* 2019. Т. 60. № 3. с. 196-206 [Fu Ch., Yan S. Analysis of the Timoshenko beam bending with a crack using a non-local gradient theory of elasticity // *Applied mechanics and technical physics.* 2019. Vol. 60. № 3 P. 196-206]. DOI: 10.15372/PMTF20190320.
4. Xiao Y., Jin H., Yu O. Bending of Timoshenko beam with effect of crack gap based on equivalent spring model // *Appl. Math. Mech.* 2016. Vol. 37. P. 513–528. DOI:10.1007/S10483-016-2042-9. Corpus ID: 124769412.
5. Batihan A.Ç., Kadioğlu F.S. Vibration Analysis of a Cracked Beam on an Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics.* 2016; Vol. 16. № 5: 15500066. (In Eng.) DOI: 10.1142/S0219455415500066.
6. Mazaheri H., Rahami H., Kheyroddin A. Static and Dynamic Analysis of Cracked Concrete Beams Using Experimental Study and Finite Element Analysis. *Periodica Polytechnica Civil Engineering.* 2018. Vol. 62. № 2. P. 337–345. (In Eng.) DOI: 10.3311/PPci.11450.
7. Fu C., Wang Y. и Tong D. Chunyu F., Yuyang W., Dawei T. Stiffness Estimation of Cracked Beams Based on Nonlinear Stress Distributions Near the Crack //

- Mathematical Problems in Engineering. 2018: 5987973. (In Eng.) DOI: 10.1155/2018/5987973.
8. Локтев А.А., Баракат А. Анализ поведения пролетных конструкций с трещинами при вибрациях // Интернет-журнал «Транспортные сооружения» [Loktev A.A., Barakat A. Analysis of the behavior of span structures with cracks during vibrations // Online magazine "Transport structures" Vol. 9. №3. 2022. / Russian Journal of Transport Engineering <https://t-s.today> 2022. Vol. 9. DOI: 10.15862/04SATS322.]
 9. Ахтямов А.М., Ильгамов М.А. Модель изгиба балки с надрезом: прямая и обратная задачи // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 1. С. 152-162. [Akhtyamov A.M., Ilgamov M.A. The model of bending a beam with an incision: direct and inverse problems // Applied mechanics and technical physics. 2013. Vol. 54. № 1. P. 152-162. / J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2014. Vol. 54. № 1. P. 132–141.] DOI: 10.1134/S0021894413010161.
 10. Shifrin E.I. Inverse spectral problem for a rod with multiple cracks // Mechanical Systems and Signal Processing. 2015. Vol. 56–57. P. 181-196. DOI:10.1016/j.ymssp.2014.11.004.
 11. Shifrin E.I. Inverse spectral problem for a non-uniform rod with multiple cracks // Mechanical Systems and Signal Processing. 2017. Vol. 96. P. 348-365. DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.04.029.
 12. Ильгамов М.А. Продольные колебания стержня с зарождающимися поперечными трещинами // МТТ. 2017. № 1. С. 23-31. [Ilgamov M.A. Longitudinal vibrations of a rod with incipient transverse cracks // МТТ. 2017. № 1. P. 23-31.] URL: <https://rucont.ru/efd/592439>.
 13. Ахтямов А. М., Ильгамов М. А. Обзор исследований по идентификации локальных дефектов стержней // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 2. С. 3-15. [Akhtyamov A.M., Ilgamov M. A. Review of studies on the identification of local defects of rods // Problems of mechanical engineering and machine reliability. 2020. № 2. P. 3-15]. DOI: 10.31857/S0235711920020042.
 14. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Усиление нагруженных стержневых конструкций с учетом влияния ремонтных и монтажных сил // Инженерно-строительный журнал. 2012. Т. 27. № 1. С. 98-105. [Serazutdinov M.N., Ubaidulloev M.N. Reinforcement of loaded core structures taking into account the influence of repair and installation forces // Civil Engineering magazine. 2012. Vol. 27. № 1. P. 98-105.]
 15. M.N. Serazutdinov, M.N. Ubaydulloyev. The method of calculating inelastic elements of rod structures under loading, unloading and reloading regimes // 12th International Conference "Mesh Methods for Boundary–Value Problems and Applications". Journal of Physics: Conf. Series. 2019. Vol. 1158 . Issue 4. P. 1 – 8.
 16. Серазутдинов М.Н., Убайдуллоев М.Н. Модель и метод расчета усиливаемых стержневых упругопластических конструкций // Материалы XXXIII международной научной конференции. Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-33. Т. 1. Казань. 2020. С. 103-109. [Serazutdinov M.N., Ubaidulloev M.N. Model and calculation method of reinforced rod elastic-plastic structures // Materials of XXXIII international scientific conference. Mathematical methods in engineering and technology – ММТТ-33. Vol. 1. Kazan. 2020. P. 103-109.]

Информация об авторах

Серазутдинов Мурат Нуриевич, доктор физ. мат. наук, профессор, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Казань, Российская Федерация

Email: serazmn@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7222-1935

Information about the authors

Murat N. Serazutdinov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Kazan National Research Technological University, Kazan, Russian Federation

Email: serazmn@mail.ru, ORCID: 0000-0001-7222-1935